حل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية باستخدام طريقة التحليل لأدوميان و أدوميان المعدلة

فاطمة محمد سليم ابوالقاسم
قسم الرياضيات كلية العلوم
f.salim@sci.misuratau.edu.ly

تاريخ الاستلام: 03- 07- 2021 تاريخ القبول: 13- 07-2021 تاريخ النشر: 01- 10- 2021

الملخص:
تناولت هذه الورقة البحثية، ايجاد حل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الاولى و الثانية، في بعد وبعين، باستخدام طريقة التحليل لأدوميان، وطريقة أدوميان المعدلة، حيث تعتمد هاتين الطريقتين على فرض الحل بصورة متسلسلات لانهائية، يتم ايجادها بسهولة وفقا لخطوات معينة، و قد تحصلنا على الفعلي للمسائل المدروسة .

الكلمات المفتاحية : معادلات تفاضلية جزئية غير خطية، نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية، طريقة التحليل أدوميان ، طريقة التحليل المعدلة لأدوميان ،متسلسلات القوى.

المقدمة Introduction

يعبر عن بعض المسائل العلمية و الهندسية والظواهر الفيزيائية، بمعادلات تفاضلية جزئية خطية و غير خطية، لذا حازت مسألة العثور على الحلول للمعادلات التفاضلية بعدة طرق اهتمام العديد من الرياضيين ، و ظهرت العديد من البحوث التي تهتم بإيجاد حل نظام من المعادلات التفاضلية غير الخطية ، مثل طريقة (HPM) [1] ، و طريقة (NDM) [9]، و طريقة التكامل الاول (FIM) [7]، و طريقة التكرار المتغير (VIM) [10]، و متسلسلات القوى [4]، و تعتبر من ابرز هذه الطرق طريقة التحليل لأدوميان ADM [2,9] .

و نركز في هذا العمل على طريقة ادوميان، التي لها مزايا عديدة تم دكرها في [11]، و قد استخدمت هذه الطريقة لايجاد حل بعض انواع المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية و المعادلات التكاملية و المعادلات التكاملية التفاضلية الخطية و غير الخطية، و ايضا تم تطبيق هذه الطريقة لايجاد حل المعادلات الجبرية و المعادلات التفاضلية الكسرية [11] ، وتعتبر خورازمية ادوميان متقاربة وفقا لشروط تقارب تم دراستها في [5,11] و تم ضمان تقارب متسلسلة ادوميان بواسطة Cherruault & G.Adomiam [11] . وقدم Nemat Dalir [12] تعديل على كتابة المؤثر التفاضلي l_t كمؤثر تفاضلي مناظر للمعادلة التفاضلية و بذلك قدم طريقة ادوميان و ادوميان المعدلة لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الشاذة غير الخطية [12] .

و في هذه الورقة، سنقوم بحل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية باستخدام طريقة ادوميان (ADM)، وأدوميان المعدلة (MADM)، حيث يتم فرض الدوال المجهولة بصورة متسلسلات $\sum_{i=0}^{\infty} u_i , \sum_{i=0}^{\infty} v_i$ ويتم التعامل مع الحدود غير الخطية بفرضها مساوية الى متعددة حدود أدوميان $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ وبذلك يسهل التعامل مع المسائل غير الخطية و ايجاد الحل بدقة عالية.

وقد تحتاج طريقة أدوميان الى وقت وحساب الكثير من التكاملات، مما يجعل هذه الطريقة غير محببة لذا البعض، فجاءت طريقة أدوميان المعدلة لتختصر الوقت و الجهد فتقلل عدد التكاملات و تقلص الحدود غير الخطية بصورة سهلة، مع المحافظة على دقة الطريقة، فبنية هذه الطريقة هذه على تجزئت الدالة الابتدائية او الفرضية الابتدائية u_0 المناظرة لأدوميان الى دالتين، أحدهما تبقى u_0 بينما الاخر تأخذ مع u_1 ، فالتغير يصبح في u_1 ، وباقي الخوارزمية تبقى كما هي، وتبرز أهميتها في المسائل غير المتجانسة بصورة واضحة.

1 الصيغة القياسية الخاصة بطريقة تحليل أدوميان (ADM)

تعود هذه الطريقة الى العالم جورج أدوميان ، حيث قدمها عام 1980.
وتعتمد بشكل أساسي على فرض الحل (الدالة المجهولة) على صورة متسلسلة لانهائية ويتم استبدال المؤثر غير الخطي بمتعددة حدود أدوميان .
و قد استخدم الباحثون هذه الطريقة لحل العديد من مسائل القيم الحدية و الابتدائية، و توصلوا الى نتائج فعالة أظهرت أهمية هذه الطريقة ، و فيما يلي سنعرض طريقة ADM [2,3,9] .

بفرض لدينا $$Lu + Ru + Nu = f(x) \qquad (1-1)$$

حيث N مؤثر تفاضلي غير خطي، L مؤثر تفاضلي خطي و هو أعلى رتبة (للمتغير المناظر له) و قابل للعكس، R مؤثر تفاضلي خطي برتبة أقل من أو يساوي L(بالنسبة للمتغير المناظر له)، أي أن R هو الجزء المتبقي من المؤثر التفاضلي الخطي .

نظام المعادلات التفاضلية المناظر للمعادلة (1-1) يمكن كتابتها على الصورة [9]

$$\left.\begin{array}{l} L_1 u + R_1\{u,v\} + N_1\{u,v\} = f_1(x,t) \\ L_2 v + R_2\{u,v\} + N_2\{u,v\} = f_2(x,t) \end{array}\right\} \qquad (2-1)$$

مع الشروط الابتدائية

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = g_1(x) \\ v(x,0) = g_2(x) \end{array}\right\} \qquad (3-1)$$

الآن يمكن صياغة الخطوات المتبعة لحل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية بطريقة مفكوك أدوميان كالتالي :

نكتب النظام (2-1) على الصورة :

$$\left.\begin{array}{l} L_1 u = f_1(x,t) - R_1\{u,v\} - N_1\{u,v\} \\ L_2 v = f_2(x,t) - R_2\{u,v\} - N_2\{u,v\} \end{array}\right\} \qquad (4-1)$$

بالتأثير عكسيا على طرفي المعادلة (4-1) نجد أن

$$\left.\begin{array}{l} L_1^{-1} L_1 u = L_1^{-1} f_1(x,t) - L_1^{-1} R_1\{u,v\} - L_1^{-1} N_1\{u,v\} \\ L_2^{-1} L_2 v = L_2^{-1} f_2(x,t) - L_2^{-1} R_2\{u,v\} - L_2^{-1} N_2\{u,v\} \end{array}\right\} \qquad (5-1)$$

في حالة فرض أن $L_1 = L_2 = \dfrac{\partial}{\partial t} = L_t$ فإن $L_1^{-1} = L_2^{-1} = \int_0^t (.)dT = L_t^{-1}$ ، بالتالي المعادلة (5-1) تكون

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t) = g_1(x) + L_t^{-1} f_1(x,t) - L_t^{-1} R_1\{u,v\} - L_t^{-1} N_1\{u,v\} \\ v(x,t) = g_2(x) + L_t^{-1} f_2(x,t) - L_t^{-1} R_2\{u,v\} - L_t^{-1} N_2\{u,v\} \end{array}\right\} \qquad (6-1)$$

نعبر عن الدوال المجهولة u ,v التي لا توجد في المؤثرات غير الخطية N_1, N_2 بمتسلسلات لانهائية كالتالي

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \quad , v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \qquad (7-1)$$

بينما نعبر عن المؤثرات غير الخطية بمتسلسلات أدوميان كالتالي

$$N_1\{u,v\} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(u,v) \quad , N_2\{u,v\} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(u,v) \qquad (8-1)$$

حيث أن $A_i(u,v), B_i(u,v)$ يطلق عليها كثيرات حدود أدوميان ، وقد صاغ أدوميان هذه الحدود بالصيغ

$$A_i(u,v) = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(G_1\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\lambda^i, \sum_{i=}^{n} v_i\lambda^i\right)\right)\Big|_{\lambda=0}$$

$$B_i(u,v) = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(G_2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\lambda^i, \sum_{i=1}^{n} v_i\lambda^i\right)\right)\Big|_{\lambda=0}$$

حيث $G_1(u,v) = N_1(u,v)$ و $G_2(u,v) = N_2(u,v)$.

الآن نوجد العلاقة التكرارية لـ u ,v كالتالي :

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= g_1(x) + L_t^{-1} f_1(x,t) \\ u_{n+1} &= -L_t^{-1}\{R_1(u_n, v_n)\} - L_t^{-1}\{A_n(u,v)\} \end{aligned}\right\} \qquad (9-1)$$

و

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= g_2(x) + L_t^{-1} f_2(x,t) \\ v_{n+1} &= -L_t^{-1}\{R_2(u_n, v_n)\} - L_t^{-1}\{B_n(u,v)\} \end{aligned}\right\} \qquad (10-1)$$

وبذلك نحصل على حل النظام (1-2) المعرف بـ (1-7) .

2 طريقة أدوميان المعدلة MADM

اهتم الباحثون بدراسة بتحسين طريقة ADM وقدرتها على الحصول على الحل الفعلي للمعادلات التفاضلية بطريقة سريعة ، فنتجت طريقة أدوميان المعدلة و طريقة ادوميان المطورة ، لتعطي النتائج المطلوبة.

اذا كانت الدلة الابتدائية $u_0 = g_1(x) + L_t^{-1} f_1(x,t) = h_1(x) + h_2(x)$ في خوارزمية أدوميان، مكونة من دوال ($f_1(x,t) \neq 0$ و $g_1(x) \neq 0$ أو احدهما على الاقل مكونة من أكثر من حد) كثيرات حدود بأكثر من حد أو خليط بين كثيرات حدود و دوال اخرى، فإننا نختار الدالة u_0 كجزء من هذه الدوال و الدوال المتبقية تضاف الى u_1 ، لنحصل على خوارزمية أدوميان المعدلة .[12]

و لحل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية باستخدام أدوميان المعدلة نتبع التالي :

نطبق طريقة أدوميان لحل النظام (1-2) أعلاه ، و المعادلات (1-9) & (1-10) تكون على الصورة

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= h_1(x) \\ u_1 &= h_2(x) - L_t^{-1}\{R_1(u_0, v_0)\} - L_t^{-1}\{A_0\} \\ u_{n+1} &= -L_t^{-1}\{R_1(u_n, v_n)\} - L_t^{-1}\{A_n(u,v)\} \quad ; \quad n = 1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (1-2)$$

و

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= h_2(x) \\ v_1 &= h_2(x) - L_t^{-1}\{R_2(u_0, v_0)\} - L_t^{-1}\{B_0\} \\ v_{n+1} &= -L_t^{-1}\{R_2(u_n, v_n)\} - L_t^{-1}\{B_n(u,v)\} \quad ; n = 1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (2-2)$$

و بذلك نحصل على حل النظام (1-2)، المعطى بالمعادلة بـ (1-7) .

3 تطبيقات

في هذا الجزء، نستخدم طريقتي التحليل لأدوميان ADM & أدوميان المعدلة MADM، لحل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ، من الرتبة الاولى و الثانية لمسائل القيم الابتدائية في بعد و بعدين.

مثال (1)

أستخدم طريقة أدوميان لإيجاد حل النظام

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - 2u_x u + (vw)_x &= 0 \\ v_t - v_{xx} - 2v_x v + (uw)_x &= 0 \\ w_t - w_{xx} - 2ww_x + (vu)_x &= 0 \end{aligned}$$

مع الشروط الابتدائية $u(x,0) = v(x,0) = w(x,0) = \sin x$

الحل الفعلي هو $u(x,t) = v(x,t) = w(x,t) = e^{-t} \sin x$

الحل

$$u_t = u_{xx} + 2u_x u - (vw)_x$$
$$v_t = v_{xx} + 2v_x v - (uw)_x$$
$$w_t = w_{xx} + 2ww_x - (vu)_x$$

نكامل المعادلات السابقة بالنسبة للمتغير t ، لنحصل على

$$u(x,t) - u(x,0) = L_t^{-1} u_{xx} + L_t^{-1}(2uu_x - (vw)_x)$$

$$v(x,t) - v(x,0) = L_t^{-1} v_{xx} + L_t^{-1}(2vv_x - (uw)_x)$$

$$w(x,t) - w(x,0) = L_t^{-1} w_{xx} + L_t^{-1}(2ww_x - (uv)_x)$$

و هذا النظام يمكن كتابته بطريقة أدوميان على صورة متسلسلات كالتالي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 + L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} + L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = v_0 + L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} v_{nxx} + L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x,t) = w_0 + L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w_{nxx} + L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right)$$

الحل نحصل علية من الخوارزمية التالية :

$$u_0 = \sin x, \quad u_{n+1} = L_t^{-1} u_{xx} + L_t^{-1}(A_n)$$
$$v_0 = \sin x, \quad v_{n+1} = L_t^{-1} v_{xx} + L_t^{-1}(B_n)$$
$$w_0 = \sin x, \quad w_{n+1} = L_t^{-1} w_{xx} + L_t^{-1}(C_n)$$

$$A_0 = N_1(u_0, v_0, w_0) = 2u_0 u_{0x} - (v_0 w_0)_x$$
$$A_0 = 2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0$$
$$\therefore u_1 = L_t^{-1}(u_{0xx}) + L_t^{-1}(A_0) = -t \sin x$$

$$B_0 = N_2(u_0, v_0, w_0) = 2v_0 v_{0x} - (u_0 w_0)_x$$
$$B_0 = 2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0$$
$$\therefore v_1 = L_t^{-1}(v_{0xx}) + L_t^{-1}(B_0) = -t \sin x$$

$$C_0 = N_3(u_0, v_0, w_0) = 2w_0 w_{0x} - (v_0 u_0)_x$$
$$C_0 = 2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0$$
$$\therefore w_1 = L_t^{-1}(w_{0xx}) + L_t^{-1}(C_0) = -t \sin x$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} N_1(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1, w_0 + \lambda w_1)\big|_{\lambda=0}$$
$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}\left(2(u_0 + \lambda u_1)(u_0 + \lambda u_1)_x - ((v_0 + \lambda v_1)(w_0 + \lambda w_1))_x\right)\big|_{\lambda=0}$$
$$A_1 = 2u_0 u_{1x} + 2u_1 u_{0x} - v_0 w_{1x} - v_1 w_{0x} - w_0 v_{1x} - v_{0x} w_1 = 0$$
$$u_2 = l_t^{-1} u_{1xx} + L_t^{-1}(A_1)$$
$$\therefore u_2 = \frac{t^2}{2} \sin x$$

$$B_1 = \frac{d}{d\lambda} N_2(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1, w_0 + \lambda w_1)\big|_{\lambda=0}$$
$$B_1 = \frac{d}{d\lambda}\left(2(v_0 + \lambda v_1)(v_0 + \lambda v_1)_x - ((u_0 + \lambda u_1)(w_0 + \lambda w_1))_x\right)\big|_{\lambda=0}$$
$$B_1 = 2v_0 v_{1x} + 2v_1 v_{0x} - u_0 w_{1x} - u_1 w_{0x} - w_0 u_{1x} - u_{0x} w_1 = 0$$
$$v_2 = l_t^{-1} v_{1xx} + L_t^{-1}(B_1)$$
$$\therefore v_2 = \frac{t^2}{2} \sin x$$

$$C_1 = \frac{d}{d\lambda} N_1(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1, w_0 + \lambda w_1)\big|_{\lambda=0}$$
$$C_1 = \frac{d}{d\lambda}\left(2(w_0 + \lambda w_1)(w_0 + \lambda w_1)_x - ((v_0 + \lambda v_1)(u_0 + \lambda u_1))_x\right)\big|_{\lambda=0}$$
$$C_1 = 2w_0 w_{1x} + 2w_1 w_{0x} - v_0 u_{1x} - v_1 u_{0x} - u_0 v_{1x} - v_{0x} u_1 = 0$$
$$w_2 = l_t^{-1} w_{1xx} + L_t^{-1}(C_1)$$
$$\therefore w_2 = \frac{t^2}{2} \sin x$$

و هكذا بالاستمرار بنفس الاسلوب نجد $A_i = B_i = C_i = 0$ لكل i .

وبذلك نحصل على الحل المطلوب $u_i = v_i = w_i = \dfrac{(-t)^i}{i!}\sin x$

$$u(x,t) = v(x,t) = w(x,t) = \sin x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = e^{-t}\sin x$$

مثال (2)

أستخدم طريقة أدوميان لإيجاد حل النظام

$$u_t + uu_x + vu_x = \frac{1}{R}\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \quad ; \; x, y, t \in \Re^2 \times \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_t + uv_x + vv_x = v_{xx} + v_{yy}$$

مع الشروط الابتدائية $u(x, y, 0) = x + y, \qquad v(x, y, 0) = x - y$

الحل الفعلي هو $u(x,t) = \dfrac{x - 2xt + y}{1 - 2t^2}, \; v(x,t) = \dfrac{x - 2yt - y}{1 - 2t^2}$

الحل

$$u_t = -N_1(u,v) + \frac{1}{R}(u_{xx} + v_{xx})$$

$$v_t = -N_2(u,v) + (u_{xx} + v_{xx})$$

حيث أن $N_1(u,v) = uu_x + vu_x, \quad N_2(u,v) = uv_x + vv_x$

نكامل المعادلات السابقة بالنسبة للمتغير t ، لنحصل على

$$u(x,t) = u(x,0) + \frac{1}{R} L_t^{-1}(u_{xx} + v_{xx}) - L_t^{-1}(N_2)$$

$$v(x,t) = v(x,0) + L_t^{-1}(u_{xx} + v_{xx}) - L_t^{-1}(N_2)$$

و هذا النظام يمكن كتابته بطريقة أدوميان على صورة متسلسلات كالتالي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 + \frac{1}{R} L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{nxx} + v_{nxxx}) - L_t^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = v_0 + L_t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(u_{nxx} + v_{nxx}) - L_t^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} B_n)$$

الحل نحصل علية من الخوارزمية التالية :

$$u_0 = x + y, \quad u_{n+1} = \frac{1}{R}L_t^{-1}(u_{nxx} + v_{nxx}) - L_t^{-1}(A_n)$$

$$v_0 = x - y, \quad v_{n+1} = L_t^{-1}(u_{nxx} + v_{nxx}) - L_t^{-1}(B_n)$$

$$A_0 = N_1(u_0, v_0) = u_0(u_0)_x + v_0(u_0)_y = 2x$$

$$\therefore u_1 = \frac{1}{R}L_t^{-1}(u_{0xx} + v_{0xx}) - L_t^{-1}(A_0) = -2xt$$

و

$$B_0 = N_2(u_0, v_0) = u_0(v_0)_x + v_0(v_0)_y = 2y$$

$$\therefore v_1 = L_t^{-1}((u_0)_{xx} + (v_0)_{xx}) - L_t^{-1}(B_0) = -2yt$$

و

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}N_1(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1)\big|_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}\Big((u_0 + \lambda u_1)(u_0 + \lambda u_1)_x + (v_0 + \lambda v_1)(u_0 + \lambda u_1)_y\Big)\Big|_{\lambda=0}$$

$$A_1 = u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x} + v_0 u_{1y} + v_1 u_{0y} = (x + y)(-2t) - 2xt + 0 - 2yt$$

$$= -4xt - 4yt$$

$$u_2 = \frac{1}{R}l_t^{-1}(u_{1xx} + v_{1xx}) - L_t^{-1}(A_1) = 2xt^2 + 2yt^2$$

و

$$B_1 = \frac{d}{d\lambda}N_2(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1)\big|_{\lambda=0}$$

$$B_1 = \frac{d}{d\lambda}\Big((u_0 + \lambda u_1)(v_0 + \lambda v_1)_x + (v_0 + \lambda v_1)(v_0 + \lambda v_1)_y\Big)\Big|_{\lambda=0}$$

$$B_1 = -2xt + (x - y)(-2t) + 2yt$$

$$= -4xt + 4yt$$

$$v_2 = l_t^{-1}(u_{1xx} - v_{1xx}) - L_t^{-1}(B_1)$$

$$\therefore v_2 = 2xt^2 - 2yt^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2} N_1(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2, v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2)\big|_{\lambda=0}$$
$$A_2 = u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x} + v_0 u_{2y} + v_1 u_{1y} + v_2 u_{0y} = 12xt^2$$
$$u_3 = \frac{1}{R} l_t^{-1}(u_{2xx} + v_{2xx}) - L_t^{-1}(A_2)$$
$$\therefore u_3 = -4xt^3$$
$$B_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2} N_2(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2, v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2)\big|_{\lambda=0}$$
$$B_2 = u_0 v_{2x} + u_1 v_{1x} + u_2 v_{0x} + v_0 v_{2y} + v_1 v_{1y} + v_2 v_{0y} = 12yt^2$$
$$v_3 = l_t^{-1}(u_{2xx} - v_{2xx}) - L_t^{-1}(B_2)$$
$$\therefore v_3 = -4yt^3$$

و بالمثل نجد أن

$$u_4 = 4xt^4 + 4yt^4, \quad v_4 = 4xt^4 - 4yt^4$$
$$u_5 = -8xt^5, \quad v_5 = -4yt^5$$
$$u_6 = 8xt^6 + 8yt^6, \quad v_6 = 8xt^6 - 8yt^6$$

و بذلك نحصل على الحل التقريبي

$$u = x + y - 2xt + 2xt^2 + 2yt^2 - 4xt^3 + 4xt^4 + 4yt^4 - 8xt^5 + 8xt^6 + 8yt^6 + \cdots$$
$$u = (x+y)(1 + 2t^2 + 4t^4 + 8t^6 + \cdots) - 2xt(1 + 2t^2 + 4t^4 + 8t^6 + \cdots)$$
$$u(x,y,t) = \frac{x+y}{1-2t^2} - \frac{2xt}{1-2t^2} = \frac{x+y-2xt}{1-2t^2}$$

و كذلك

$$v(x,y,t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i = v_0 + v_1 + \cdots$$
$$v = x - y - 2yt + 2xt^2 - 2yt^2 - 4yt^3 + 4xt^4 - 4yt^4 - 8yt^5 + 8xt^6 - 8yt^6 + \cdots$$
$$v = (x-y)(1 + 2t^2 + 4t^4 + 8t^6 + \cdots) - 2yt(1 + 2t^2 + 4t^4 + 8t^6 + \cdots)$$
$$v(x,y,t) = \frac{x-y}{1-2t^2} - \frac{2yt}{1-2t^2} = \frac{x-y-2yt}{1-2t^2}$$

و هو مطابق للحل الفعلي .

مثال (3)

أوجد حل النظام التالي

$$u_{tt} - u + vu_x - 1 = 0$$
$$v_{tt} - v + uv_x + 1 = 0$$

مع الشروط الابتدائية $v(x,0) = v_t(x,0) = e^{-x}$ و $u(x,0) = e^x, u_t(x,0) = -e^x$

الحل

$$u_{tt} = 1 + u - vu_x$$
$$v_{tt} = -1 + v - uv_x$$

نكامل المعادلتين السابقتين مرتين بالنسبة للمتغير t ، و نعوض بالشروط الابتدائية لنحصل على

$$u(x,t) = e^x - te^x + \frac{t^2}{2} + L_{tt}^{-1}(u) - L_{tt}^{-1}(vu_x)$$
$$v(x,t) = e^{-x} + te^{-x} - \frac{t^2}{2} + L_{tt}^{-1}(v) - L_{tt}^{-1}(uv_x) \qquad (1)$$

الآن نفرض أن $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$

و الحدود غير الخطية في صورة حدودية أدوميان كالتالي

$$N_1 = vu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, , \, N_2 = uv_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = e^x - te^x + \frac{t^2}{2} + L_{tt}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L_{tt}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = e^{-x} + te^{-x} - \frac{t^2}{2} + L_{tt}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) - L_{tt}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

الحل نحصل علية من الخوارزمية التالية :

$$u_0 = e^x, \quad u_1 = -te^x + \frac{t^2}{2} + L_{tt}^{-1}(u_0) - L_{tt}^{-1}(A_0),$$
$$u_{n+1} = L_{tt}^{-1}(u_n) - L_{tt}^{-1}(A_n) \, , \, n = 1,2,\cdots$$
$$v_0 = e^{-x}, \quad v_1 = te^{-x} - \frac{t^2}{2} + L_{tt}^{-1}(v_0) - L_{tt}^{-1}(B_0),$$
$$v_{n+1} = L_{tt}^{-1}(v_n) - L_{tt}^{-1}(B_n) \, , \, n = 1,2,\cdots$$

و بالتالي الحد الثاني يكون

$$u_1 = -te^x + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}e^x - L_{tt}^{-1}(A_0)$$
$$A_0 = N_1(u_0, v_0) = v_0 u_{0x} = 1$$
$$\therefore u_1 = -te^x + \frac{t^2}{2}e^x$$

$$v_1 = te^{-x} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}e^{-x} - L_{tt}^{-1}(B_0)$$
$$B_0 = N_2(u_0, v_0) = u_0 v_{0x} = -1$$
$$\therefore v_1 = te^{-x} + \frac{t^2}{2}e^{-x}$$

و الحد الثالث

$$u_2 = L_{tt}^{-1}(u_1) - L_{tt}^{-1}(A_1); \quad A_1 = \frac{d}{d\lambda} N_1(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1)\Big|_{\lambda=0}$$
$$A_1 = \frac{d}{d\lambda}\left((v_0 + \lambda v_1)(u_0 + \lambda u_1)_x\right)\Big|_{\lambda=0} = v_0 u_{1x} + v_1 u_{0x} = 0$$
$$\therefore u_2 = -\frac{t^3}{6}e^x + \frac{t^4}{24}e^x$$
$$v_2 = L_{tt}^{-1}(v_1) - L_{tt}^{-1}(B_1); \quad B_1 = \frac{d}{d\lambda} N_2(u_0 + \lambda u_1, v_0 + \lambda v_1)\Big|_{\lambda=0}$$
$$B_1 = \frac{d}{d\lambda}\left((u_0 + \lambda u_1)(v_0 + \lambda v_1)_x\right)\Big|_{\lambda=0} = u_0 v_{1x} + u_1 v_{0x} = 0$$
$$\therefore v_2 = \frac{t^3}{6}e^{-x} + \frac{t^4}{24}e^{-x}$$

هكذا نجد $A_n = B_n = 0\,; n \geq 1$ و $u_{n+1} = L_{tt}^{-1}(u_n), \quad v_{n+1} = L_{tt}^{-1}(v_n)$

و الحل التقريبي يكون على الصورة

$$u(x,t) = e^x - te^x + \frac{t^2}{2}e^x - \frac{t^3}{6}e^x + \frac{t^4}{24}e^x - \cdots = e^{x-t}$$
$$v = e^{-x} + te^{-x} + \frac{t^2}{2}e^{-x} + \frac{t^3}{6}e^{-x} + \frac{t^4}{24}e^{-x} + \cdots = e^{t-x}$$

مثال (4)

أوجد حل النظام

$$u_x - vu_t + uv_t = -1 + e^x \sin t$$
$$v_x + u_t v_x + v_t u_x = -1 - e^{-x}\cos t$$

مع الشروط $u(0,t) = \sin t, \quad v(0,t) = \cos t$

و الحل الفعلي هو $u(x,t) = e^x \sin t\,, \; v(x,t) = e^{-x}\cos t$

الحل

$$u_x = -1 + e^x \sin t - N_1(u,v)$$
$$v_x = -1 - e^{-x}\cos t - N_2(u,v)$$

حيث $N_1 = -vu_t + uv_t\,, \quad N_2(u,v) = u_t v_x + v_t u_x$

نكامل المعادلتين السابقتين بالنسبة للمتغير x ، لنحصل على

$$u(x,t) = u(x,0) - x + e^{x}\sin t - \sin t - L_x^{-1}N_1(u,v)$$
$$v(x,t) = v(x,0) - x + e^{-x}\cos t - \sin t - L_x^{-1}N_2(u,v)$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية نجد أن

$$u(x,t) = -x + e^{x}\sin t - L_x^{-1}N_1(u,v)$$
$$v(x,t) = -x + e^{-x}\cos t - L_x^{-1}N_2(u,v)$$

و هذا حل النظام يمكن كتابته على صورة متسلسلات كالتالي :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad \text{و} \quad v(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$$

و نحصل علية من خوارزمية أدوميان المعدلة كالتالي :

$$u_0 = e^{x}\sin t, \quad u_1 = -x - L_x^{-1}(A_0), \quad u_{n+1} = -L_x^{-1}(A_n), \quad n = 1,2,\cdots$$
$$v_0 = e^{-x}\cos t, \quad v_1 = -x - L_x^{-1}(B_0), \quad v_{n+1} = -L_x^{-1}(B_n), \quad n = 1,2,\cdots$$

نحسب عوامل أدوميان و الحدود المناظرة لها كالتالي :

$$\because A_0 = N_1(u_0, v_0) = -v_0(u_0)_t + u_0(v_0)_t$$
$$A_0 = -e^{-x}\cos t\,(e^{x}\cos t) + e^{x}\sin t\,(-e^{-x}\sin t) = -1$$
$$\therefore u_1 = -x - L_t^{-1}(A_0) = -x + x = 0$$
$$\because B_0 = N_2(u_0, v_0) = (v_0)_x(u_0)_t + (u_0)_x(v_0)_t$$
$$A_0 = -e^{-x}\cos t\,(e^{x}\cos t) + e^{x}\sin t\,(-e^{-x}\sin t) = -1$$
$$\therefore v_1 = -x - L_t^{-1}(B_0) = -x + x = 0$$

أي أن $\forall i \geq 1 \quad u_i = 0 \,,\, v_i = 0$ ، وبذلك الحل يكون

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 = e^{x}\sin t \quad \text{و} \quad v(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = v_0 = e^{-x}\cos t$$

و هو مطابق للحل الفعلي .

ملاحظة

عند تطبيق طريقة ادوميان في الامثلة المعروضة ادت الى الحصول على الحل الفعلي وهذا يعزز قوة الطريقة، لكن بصورة عامة، ليس من الضرورة ان تعطي حلا فعليا للمسائل غير الخطية التي تخضع لشرط تقارب هذه الطريقة [5,11]، ولكن تعطي حل تقريبي لهذه المسائل، فقد قام كلا من Saad و Nergiz [6] بايجاد حلا تقريبي لـ Nonliear Kaup-Boussinesq باستخدام طريقة ادوميان وتحصلا على حل تقريبى يتقارب الى الحل الفعلي، لتوضيح هذا انظر [6] .

الاستنتاجات Conclusions

يوصي بتطبيق طريقة ADM و طريقة أدوميان المعدلة MADM، لحل بعض انظمة المعادلات التفاضلية غير الخطية ، مثل نظام المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية غير الشاذة ، خاصة التي حدودها جبرية ، فمن الملاحظ أن هاتين الطريقتين تعتبران فعالتان ، وذلك لأنهما تعملان على حل نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات عوامل ثابتة أو متغيرة في بعد أو بعدين من أي رتبة، دون اللجوء الى العملية الخطية أو الاضطراب بأسلوب سهل، وفي حالة عدم الدراية بالحل الفعلي فهي تعطي حل تقريبي لمثل هذه المسائل، و قد لاحظنا من خلال تطبيق هذه الطريقة أنه في حالة وجود الحل الفعلي للنظام المدروس فإن هذه الطريقة تعطينا حلا في حدود متلسلسة تتقارب الى الحل الفعلي .

المراجع References

1) برلنت صبري مطّيط، " الحل العددي لجملة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية باستخدام طريقة HPM " ، مجلة البحث- المجلد 138، العدد 16، (129- 153)،2016 .

2) رهف سعد الشهري .رهف محمد الحياني. سلوة مانع الأحمري .فاطمة حسن العمري. فاطمة ناصر الحدري .ميعاد ناصر الشهراني. وعد بنت زبرانز علي الحارثي،" طريقة تفريق أدوميان لحل المعادلات التفاضلية"، مشروع بحث مقدم الى قسم الرياضيات بكلية العلوم في جامعة الملك خالد، المملكة العربية السعودية ، 1441.

3) Alaeddin Elayyan " Adomian Decomposition Method For Solving Partial Differential Equations " M.Sc. thesis, Birzeit University, Palestine, 2016.

4) Ameina S. Nuser, Abeer Al-Hasoon, "power Series Solutions for Nonlinear Systems of Partial Differential Equations ", Applied Mathematical Sciences, Vol.6, 2012.

5) E. Babolian, J .Biazar, "On the Order Convergence of Adomian Method " , Aplied Mathematics Compation 130, pp 383-387, 2002.

6) Saad A.Manau, Nergiz M. Mosa, "Adomian Decomposition And Successive Approximation Tion Method for Solving Kaup-Boussinessq System" , Science Journal of University of Zakho, Vol.7, No.3, pp.101-107, 2019.

7) Shoukry Ibrahim Atia, "New Exact Solution of Some Nonlinear Systems of Partial Differential Equations Using The First Integral Method", Hindawi publishing corporation, Abstract and Applied Analysis, Article ID693076, 13 pages, 2013.

8) Mohmoud S. Rawashdeh, Shehu Maitama, "Solving Coupled System Of Nonlinear PDE'S Using The Natural Decomposition Method" , International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 92, 757-776, 2014.

9) Mohammed E. A. Rabie, Tarig M. Elzaki, "A Study Of Some System Of Nonlinear Partial Differential Equations By Using Adomian And Modified Decomposition Methods", African Journal of Mathematics and Computer Science Research,Vol.7(6),pp. 61-67, Article, 2014.

10) Myasar Obaid Enadi, "Efficient Method for Solving Some Types of Partial Differential Equations" , Master of Science in Math, Baghdad University ,Iraq, 2019.

11) Wenjin Li, Yanni Pang, "Application of Adomian Decomposition Method to Nonliear Systems" , Advance in Difference Equation, Article Number 67, 2020.

12) Nemat Dalir, "Modified Decomposition Method with New Inverse Differention Operators for solving Singular Nonliear IVPs in First and Seccond-Order PDEs Arising in Fluid Mechanics " , International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 793685, 2014.

Solving System of Nonlinear Partial Equations By Using Adomian Decomposition Method (ADM) and Modified Adomian Decomposition Method(MADM)

fatma Mohammed Salim abulgasem
mathematics department, faculty of science
f.salim@sci.misuratau.edu.ly

Abstract:
This paper deals with finding the approximate solution for System of Nonlinear partial Differential Equation, Using the Adomian Decomposition Method (ADM) and Modified Adomian Decomposition Method(MADM), as this method is based on dividing the solution into infinite series of solution that quickly converge to the exact solution, and we may get the exact solution of the studied problems.

Keywords: Nonlinear Partial Differential Equations, system of Nonlinear Partial Differential Equation, , Adomian Decomposition Method (ADM), Modified Adomian Decomposition Method (MADM), power Series.